Punti e rette nel piano cartesiano

1 PIANO CARTESIANO E COORDINATE CARTESIANE ______ **2**

2 DISTANZA FRA DUE PUNTI ______ **4**

3 PUNTO MEDIO FRA DUE PUNTI DATI ______ **5**

4 RETTA PER DUE PUNTI ______ **5**

5*COEFFICIENTE ANGOLARE DI UNA RETTA (SIGNIFICATO GONIOMETRICO) ______ **9**

6 EQUAZIONI PARAMETRICHE DI UNA RETTA ______ **9**

7 RETTE PER UN PUNTO ______ **11**

8 RETTE PARALLELE ______ **12**

9* ANGOLO TRA DUE RETTE ______ **13**

10 RETTE PERPENDICOLARI ______ **14**

11 POSIZIONI RELATIVE DI DUE RETTE E SISTEMI LINEARI ______ **15**

12 DISTANZA DI UN PUNTO DA UNA RETTA ______ **17**

13 FUNZIONI AFFINI PER INTERVALLI ______ **18**

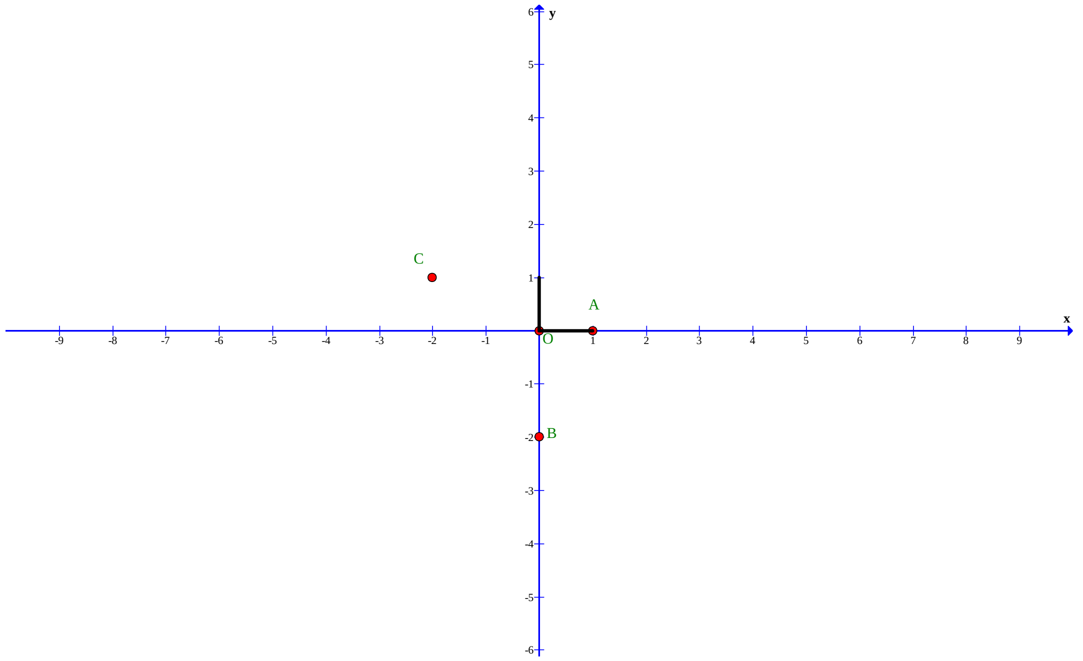
14 DISEQUAZIONI LINEARI IN 2 INCOGNITE ______ **20**

15 SISTEMI DI DISEQUAZIONI LINEARI IN 2 INCOGNITE ______ **21**

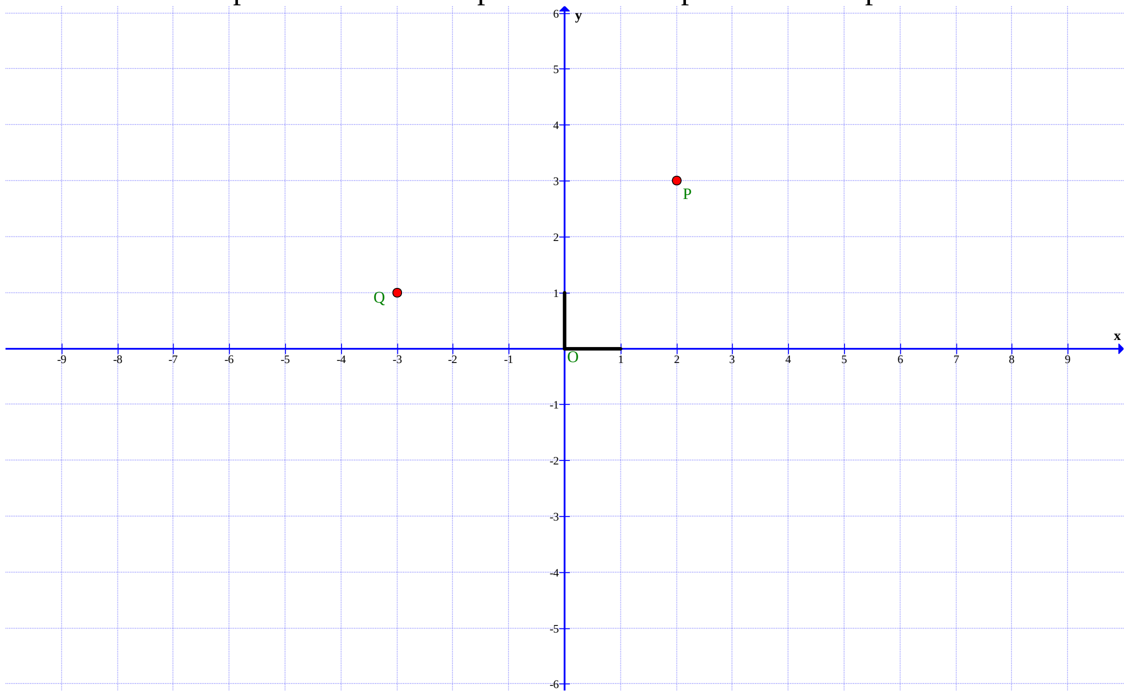
16 ESERCIZI ______ **23**

1 Piano cartesiano e coordinate cartesiane

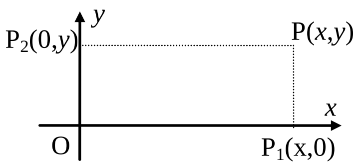
Il piano geometrico è formato da infiniti punti e infinite rette. Su questo piano si scelgono due rette perpendicolari che si intersecano in un punto O. Su ciascuna di queste rette si sceglie una unità di misura delle lunghezze dei segmenti (in genere la stessa unità) ed un verso positivo di percorrenza.



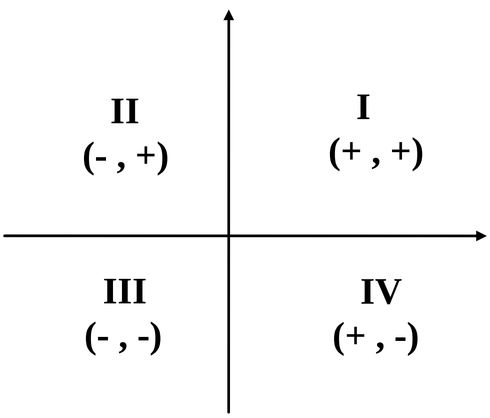
Allora ogni punto di queste rette viene messo in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri reali. La retta orizzonatale si chiama asse delle ascisse (e viene, in genere, indicata con *x*), la retta verticale si chiama asse delle ordinate (e viene, in genere, indicata con *y*) . Nella figura il punto A occupa, sull'asse delle ascille, la posizione 1, perchè OA misura 1 rispetto all'unità di misura scelta. Il punto B occupa, sull'asse delle ordinate la posizione -2, perchè OB misura 2 rispetto all'unità di misura scelto e B si trova dalla parte opposta rispetto ad O e al verso positivo assegnato, e così via. In questo modo ognuno dei punti degli assi *x* e *y* é individuabile assegnando la retta ed un numero reale. Ma come é possibile fissare la posizione di un punto come il punto C?



Per rispondere alla domanda bisogna allargare il discorso e stabilire una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei punti del piano e le coppie (x,y) di numeri reali, dopo che nel piano si sono fissati due assi privilegiati x e y (detti assi cartesiani), con il loro verso positivo di percorrenza e la loro unità di misura, come fatto in precedenza. In questo modo il punto P del piano corrisponde alla coppia (2,3) di numeri reali, il punto Q alla coppia (-3,1) di numeri reali, l'origine O alla coppia (0,0) e così via. Essendo la corrispondenza biunivoca, vale anche il viceversa, nel senso che, ad esempio, fissata la coppia (2,3) di numeri reali, a questa corrisponde in modo inequivocabile il punto P.



Il primo numero della coppia indica l'**ascissa** del punto considerato, il secondo numero l'**ordinata**. Dunque quando si scrive $P(x,y)$ si intende dire che il punto P ha ascissa x e ordinata y. Le proiezioni di P sugli assi cartesiani sono date dai punti $P_1(x,0)$ e $P_2(0,y)$.
Quando il piano viene riferito ad un sistema di assi cartesiani, viene da questi diviso in quattro regioni (dette anche quadranti) numerate come nella figura sottostante.



Un punto che si trova nel primo quadrante ha ascissa positiva e ordinata positiva.

Un punto che si trova nel secondo quadrante ha ascissa negativa e ordinata positiva.

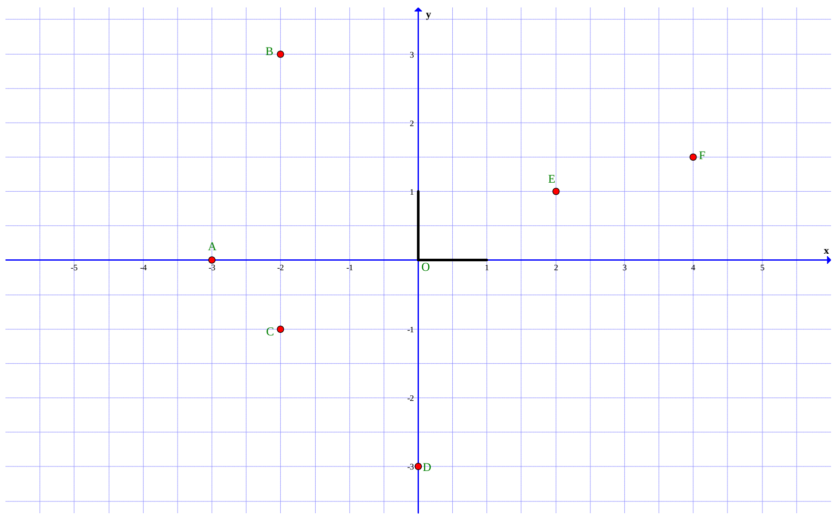
Un punto che si trova nel terzo quadrante ha ascissa negativa e ordinata negativa.

Un punto che si trova nel quarto quadrante ha ascissa positiva e ordinata negativa.

<u>Punti particolari</u>:

- l'origine O degli assi cartesiani ha coordinate (0,0)
- i punti dell'asse delle ascisse hanno tutti ordinata nulla e, quindi hanno coodinate del tipo $(x,0)$
- i punti dell'asse delle ordinate hanno tutti ascissa nulla e, quindi, hanno coordinate del tipo $(0,y)$

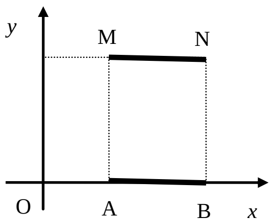
Nella figura a lato sono rappresentati alcuni punti in un piano cartesiano in cui é stata predisposta una 'rete' di punti per agevolare la lettura delle coordinate. Ecco i punti:



A(-3,0),
B(-2,3),
C(-2,-1),
D(0,-3)
E(2,1),
F(4,3/2)

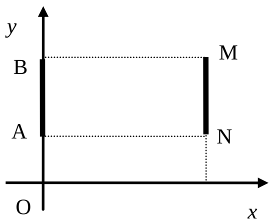
2 Distanza fra due punti

La distanza fra due punti del piano è, per definizione non negativa, nel senso che risulta positiva se i due punti sono distinti e risulta nulla se i due punti sono coincidenti.
Prima di vedere come si calcola la distanza fra due punti qualunque del piano, è utile considerare due casi particolari:



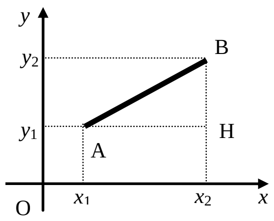
- <u>I due punti sono entrambi sull'asse delle *x* o su una retta parallela all'asse delle *x*.</u>
  In questo caso, siano A(x_1,0) e B(x_2,0) oppure M(x_1,h) e N(x_2,h) i due punti. Si ha subito:

$$AB = MN = |OB - OA| = |x_2 - x_1|.$$



- <u>I due punti sono entrambi sull'asse delle *y* o o su una retta parallela all'asse delle *y*.</u>
  In questo caso, siano A(0,y_1) e B(0,y_2) oppure M(k,x_1) e N(k,y_2) i due punti. Si ha subito:

$$AB = MN = |OB - OA| = |y_2 - y_1|.$$



In generale, se $A(x_0, y_0)$ e $B(x_1, y_1)$ sono due punti qualunque, come si vede dalla figura a lato, applicando il teorema di pitagora al triangolo rettangolo AHB, risulta:

$$AB = \sqrt{(AH)^2 + (BH)^2}$$

o anche (tenendo presente i due casi particolari precedenti):

$$\boxed{AB = \sqrt{\left(x_1 - x_0\right)^2 + \left(y_1 - y_0\right)^2}}$$

Esempio 1 Se A(1,1) e B(3,1), risulta: $AB = |3-1| = 2$.

Esempio 2 Se A(1,2) e B(1,-3), risulta: $AB = |-3-2| = |-5| = 5$.

Esempio 3 Se A(0,5) e B(0,2), risulta: $AB = |2-5| = |-3| = 3$.

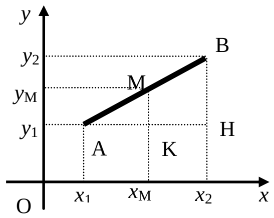
Esempio 4 Se A(1,-2) e B(-3,1), risulta:

$$AB = \sqrt{(-3-1)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

Esempio 5 Se A(-2,2) e B(1,-1), risulta:

$$AB = \sqrt{(1+2)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}.$$

3 Punto medio fra due punti dati



Siano $A(x_0, y_0)$ e $B(x_1, y_1)$ i due punti. Deve essere:
AM = MB
il che implica anche che AK = KH; dunque (se $x_2 > x_1$):
$x_M - x_1 = x_2 - x_M$
da cui si ha:
$$x_M = \frac{x_0 + x_1}{2}$$

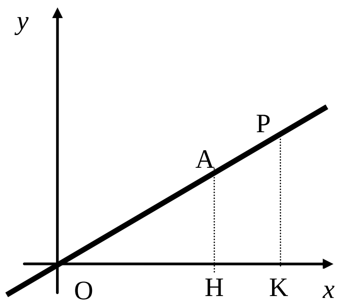
E, analogamente: $y_M = \dfrac{y_0 + y_1}{2}$; risulta che il punto medio M ha coordinate::
risulta che il punto medio M ha coordinate:

$$\boxed{M\left(\frac{x_0 + x_1}{2}, \frac{y_0 + y_1}{2}\right)}.$$

Esempio Se A(1,-2) e B(-3,1), risulta: $M\left(\dfrac{1+(-3)}{2}, \dfrac{-2+1}{2}\right)$, cioè M(-1,-1/2).

4 Retta per due punti

Geometricamente, per due punti del piano passa una ed una sola retta. Un terzo punto del piano può o non può passare per la retta dei primi due: se passa è **allineato** con i primi due, altrimenti no.



Questa condizione di allineamento si traduce in una condizione che consente di trovare l'equazione della retta che passa per due punti dati.
Per cominciare i due punti siano l'origine O(0,0) degli assi cartesiani ed il punto $A(x_0, y_0)$. Un punto qualunque P(x,y) appartiene alla retta (OA) due se i triangoli rettangoli OAH e OPK sono simili, se si verifica per esempio che:

$$\frac{PK}{OK} = \frac{AH}{OH} \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{x} = \frac{y_0}{x_0} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{y_0}{x_0}x \qquad (1)$$

oppure (ponendo $\dfrac{y_0}{x_0} = m$, detto **coefficiente angolare** della retta):

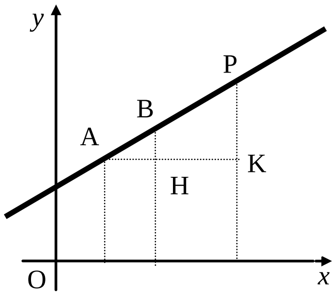
$$\boxed{y = mx} \qquad (2)$$

La (2), che si chiama anche ***funzione lineare***, rappresenta dunque l'equazione di una generica retta che passa per l'origine degli assi cartesiani.

La relazione (1) può anche essere scritta sotto la forma:

$$\boxed{ax + by = 0} \qquad (3)$$

dove si é posto $y_0 = a$ e $-x_0 = b$.



E’ possibile generalizzare considerando la retta che passa per due punti $A(x_0, y_0)$ e $B(x_1, y_1)$. In tal caso un punto qualunque P(x,y) è allineato con i primi due (e quindi appartiene alla retta dei primi due) se i triangoli rettangoli ABH e APK risultano simili, quindi se si verifica per esempio che:

$$\frac{PK}{AK} = \frac{BH}{AH} \quad \Rightarrow \quad \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$, o anche:

$$\boxed{y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\left(x - x_0\right)} \qquad (4)$$

Sviluppando l’ultima relazione, si ha:

$$\left(y - y_0\right)\left(x_1 - x_0\right) = \left(y_1 - y_0\right)\left(x - x_0\right) \quad \Rightarrow$$
$$\left(y_1 - y_0\right)x + \left(x_0 - x_1\right)y + \left(x_1 - x_0\right)y_0 - \left(y_1 - y_0\right)x_0 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{ax + by + c = 0} \qquad (5)$$

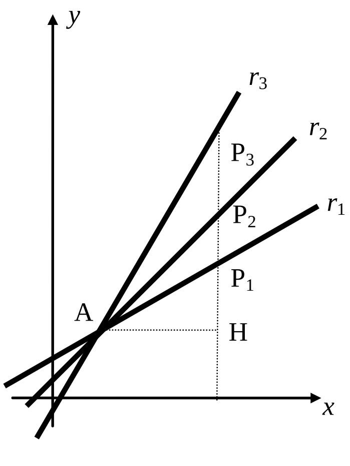
dove si è posto:

$$a = y_1 - y_0,$$
$$b = x_0 - x_1, \qquad .$$
$$c = \left(x_1 - x_0\right)y_0 - \left(y_1 - y_0\right)x_0$$

L’espressione $m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ esprime il **coefficiente angolare** della retta, che é definito come il *rapporto fra la differenza delle ordinate e la differenza delle ascisse di due punti qualunque della retta*. Allora, a parità di denominatore, piú grande é il numeratore, piú grande é m. Quindi rette che hanno un valore di m piú grande hanno una pendenza maggiore rispetto all’asse delle x. Così, per le rette r_1, r_2 e r_3 della figura a lato, risulta, per i rispettivi coefficienti angolari m_1, m_2 e m_3, che:

$$m_1 < m_2 < m_3$$

in quanto:



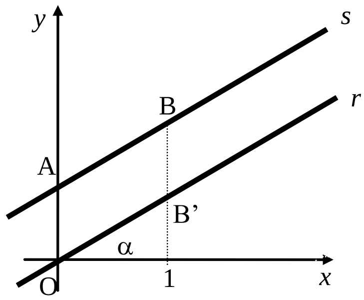
$$m_1 = \frac{P_1H}{AH}, \; m_2 = \frac{P_2H}{AH}, \; m_3 = \frac{P_3H}{AH} \quad \text{e}$$

$$P_1H < P_2H < P_3H$$

La relazione (5), che esprime la *forma implicita* dell’equazione di una retta, si può risolvere rispetto a y e scrivere (ponendo $m = -\frac{a}{b}$ e $n = -\frac{c}{b}$, sempre che sia b ≠ 0):

$$\boxed{y = mx + n} \qquad (6)$$

La (6) esprime la *forma esplicita* dell'equazione di una generica retta del piano e viene anche chiamata ***funzione affine***.



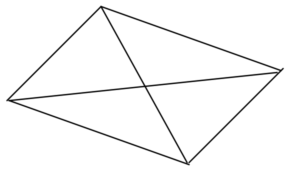
La (2) e la (6) esprimono le equazioni di due ***rette pa-rallele***, in quanto se *r* è la rappresentazione geometri-ca della (2), il punto B'(1,*m*)$\in$*r*; se *s* è la rappresenta-zione geometrica della (6), il punto B(1,*m* + *n*)$\in$s, e il punto A(0,*n*)$\in$*s*.
Inoltre risulta:

$$OA = n \quad \text{e} \quad BB' = (m + n) - m = n,$$

dunque i lati opposti [OA] e [BB'] del quadrilatero OABB' risultano paralleli ed aventi la stessa lunghezza. Allora il quadrilatero risulta un parallelogramma ed anche i lati opposti [AB] e [OB] risultano paralleli.

Per un parallelogramma:

- i lati opposti sono paralleli ed hanno la stessa lunghezza
- il punto medio di una diagonale é anche punto medio dell'altra diagonale



Quanto sopra giustifica il nume di *coefficiente angolare* dato al coefficiente *m* che compare nella (2) e nella (6): due rette che hanno lo stesso valore di *m*, sono parallele e dunque formano lo stesso angolo α con la direzione positiva dell'asse delle *x*.

Riassumendo: L'equazione di una generica retta del piano si scrive:

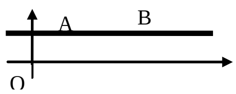
$$\boxed{ax + by + c = 0} \text{ (forma implicita)}$$

oppure:

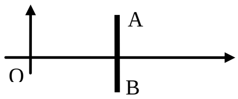
$$\boxed{y = mx + n} \text{ (forma esplicita, } \textbf{\textit{funzione affine}}\text{),}$$

dove si è posto $m = -\dfrac{a}{b}$ e $n = -\dfrac{c}{b}$ (sempre che sia b $\neq$ 0).
Il termine *n* rappresenta l'ordinata all'origine, in quanto la retta interseca l'asse delle *y* in (0,*n*)

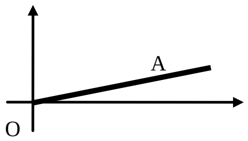
Casi particolari:



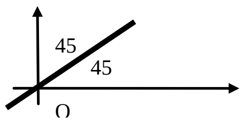
Se i due punti hanno coordinate $A(x_0,k)$ e $B(x_1, k)$, la retta ha equazione *y* = *k* (retta parallela all'asse *x*). In particolare l'asse *x* ha equazione *y* = 0.



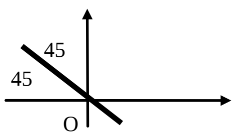
Se i due punti hanno coordinate $A(h, y_0)$ e $B(h, y_1)$, la retta ha equazione $x = h$ (retta parallela all'asse y). In particolare l'asse y ha equazione $x = 0$.



Se i due punti sono $O(0,0)$ e $A(a,b)$, la retta (OA) ha equazione: $y = \frac{b}{a}x$.



Se i punti sono $O(0,0)$ e $A(a,a)$, la retta (OA) ha equazione: $y = x$ (bisettrice del primo e del terzo quadrante).



Se i punti sono $O(0,0)$ e $A(a,-a)$, la retta (OA) ha equazione: $y = -x$ (bisettrice del secondo e del quarto quadrante).

Esempio 1 Scrivere l'equazione della retta passante per l'origine O e per il punto A(2,1).

Si ha che la retta passante per O ha equazione $y = mx$, e dovendo passare anche per A(2,1), deve essere $1 = 2m$, da cui $m = 1/2$, e, dunque l'equzione della retta richiesta é:

$$y = \frac{1}{2}x.$$

Esempio 2 Scrivere l'equazione della retta r passante per i punti A(-1,3) e B(3,2).

<u>Primo metodo</u>: l'equazione della retta r è del tipo $y = mx + n$, e doven-do la retta passare per i punti A e B, deve essere:

$$\begin{cases} 3 = -m + n \\ 2 = 3m + n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{4} \\ n = \frac{11}{4} \end{cases} \Rightarrow \quad r\colon y = -\frac{1}{4}x + \frac{11}{4} \quad .$$

<u>Secondo metodo</u>: Si applica la (4) e si ha subito:

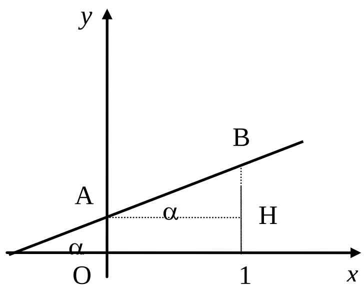
$$y - 3 = \frac{2-3}{3+1}(x+1) \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{4} + 3 \quad \Rightarrow \quad r\colon y = -\frac{1}{4}x + \frac{11}{4} \quad .$$

Esempio 3 Scrivere l'equazione della retta r pasante per A(2,-3) e parallela alla retta $y = 2x + 5$.

La retta r ha un'equazione del tipo: $y = 2x + n$, dove n si calcola imponendo il passaggio per il punto A:
$-3 = 4 + n$, da cui: $n = -7$.
Dunque l'equazione della retta r é:

$$y = 2x - 7.$$

5*Coefficiente angolare di una retta (significato goniometrico)



Se si considera la retta $y = mx + n$ della figura a lato, e si considerano i punti della retta A(0,*n*) e B(1, *m* + *n*), si ha (dal triangolo rettangolo AHB):

$$\tan\alpha = \frac{BH}{AH} = \frac{m+n-n}{1} = m$$

dunque il coefficiente angolare di una retta esprime la tangente dell'angolo che la retta forma con la direzione positiva dell'asse delle *x*.

Per questo si dice anche che **il coefficiente angolare di una retta esprime la pendenza della retta rispetto all'asse delle** ***x*****.**

In particolare, **le rette che formano un angolo acuto con la direzione positiva dell'asse** ***x*** **hanno un coefficiente angolare positivo**; **le rette che formano un angolo ottuso con la direzione positiva dell'asse** ***x*** **hanno un coefficiente angolare negativo**.

Esempio 1 La retta $y = x + 2$ ha coefficiente angolare *m* = 1, dunque, essendo tan45° = 1, forma un angolo di 45° con la direzione positiva dell'asse delle *x*.

Esempio 2 La retta $y = -\sqrt{3}x + 1$ ha coefficiente angolare $m = -\sqrt{3}$, dunque, essendo tan120° = $-\sqrt{3}$, forma un angolo di 120° con la direzione positiva dell'asse delle *x*.

Esempio 3 La retta *y* = 3 (parallela all'asse delle *x*) ha coefficiente angolare nullo e forma un angolo di 0° con la direzione positiva dell'asse *x*. Tutte le rette parallele all'asse delle *x* hanno naturalmente coefficiente angolare nullo.

Esempio 4 La retta *x* = -2 (parallela all'asse delle y) ha coefficiente angolare infinito e forma un angolo di 90° con l'asse delle *x*. Tutte le rette parallele all'asse delle *y* hanno naturalmente coefficiente angolare infinito.

6 Equazioni parametriche di una retta

Se si riscrive l'equazione della retta fra due punti $A(x_0, y_0)$ e $B(x_1, y_1)$ in questo modo:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \lambda,$$

si ha anche:

$$\begin{cases} x - x_0 = \lambda(x_1 - x_0) \\ y - y_0 = \lambda(y_1 - y_0) \end{cases}, \text{ da cui: } \begin{cases} x = x_0 + \lambda(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + \lambda(y_1 - y_0) \end{cases},$$

o infine, ponendo $x_1 - x_0 = u_1$ e $y_1 - y_0 = u_2$:

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 \end{cases}}$$

Le equazioni precedenti forniscono tutti i punti della retta per ogni valore numerico che si assegna al **parametro** λ e per questo si chiamano **equazioni parametriche** della retta passante per $A(x_0, y_0)$ ed avente per **coefficiente angolare** il rapporto:

$$\boxed{m = \frac{u_2}{u_1} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}$$

Esempio 1 Scrivere le equazioni parametriche della retta (AB), dove A(1,-3) e B(2,5).

Essendo u_1 = 2 - 1 = 1 e u_2 = 5 -(-3) = 8, si ha subito che le equazioni parametriche richieste sono:

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -3 + 8\lambda \end{cases} \qquad \left(\text{dove } m = \frac{8}{1} = 8\right).$$

Dalle equazioni precedenti si hanno le coordinate del punto A se si dà a λ il valore 0; per avere le coordinate del punto B si si dà a λ il valore 1. Prendendo, invece, λ = -2, si ha il punto C(-1,-15), pure appartenente alla retta (AB).

Esempio 2 Scrivere le equazioni parametriche della retta $y = -2x + 3$.
Essendo $m = -2$, si può prendere $u_1 = 1$ e $u_2 = -2$ ed un punto qualunque della retta, ad esempio il punto A(0,3). Dunque le equazioni parametriche richieste della retta data sono:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 - 2\lambda \end{cases}.$$

Esempio 3 Scrivere le equazioni parametriche della retta $3x - 2y + 5 = 0$.
Essendo $m = -\frac{3}{-2} = \frac{3}{2}$, si può prendere $u_1 = 2$ e $u_2 = 3$ ed un punto qualunque della retta, ad esempio il punto A(1,4).
Dunque le equazioni parametriche richieste della retta data sono:

$$\begin{cases} x = 1 + 2a \\ y = 4 + 3a \end{cases} \quad (*),$$

dove si é indicato il parametro con a.

Se si prende il punto B(-1,1) della retta e $u_1 = 4$ e $u_2 = 6$ (il rapporto tra u_2 e u_1 si mantiene ancora uguale a 3/2), le equazioni parametriche della retta data si possono anche scrivere:

$$\begin{cases} x = -1 + 4b \\ y = 1 + 6b \end{cases} \quad (**),$$

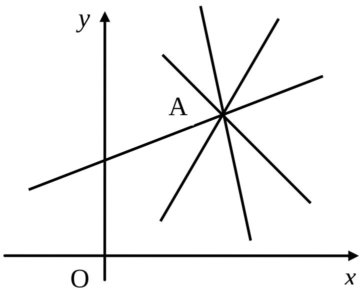
dove si è indicato il parametro con *b*.

I due sistemi (*) e (**) danno entrambi le equazioni parametriche di una stessa retta. Solo che, per determinare un punto dato, il valore che bisogna assegnare ai due parametri *a* e *b* non è lo stesso. Ad esempio, dal sistema (*), per avere il punto A(1,4), deve essere $a = 0$; invece dal sistema (**), per avere lo stesso punto A(1,4) deve essere $b = \frac{1}{2}$.

L'ultimo esempio illustra bene il fatto che ci sono infiniti modi diversi per scrivere le equazioni parametriche di una stessa retta.

7 Rette per un punto

Per un punto A(x_o,y_o) del piano passano infinite rette (fascio di rette con fulcro in A).
L'equazione di una generica retta del piano è:



$$y = mx + n$$

Imponendo che la retta passi per $A(x_0, y_0)$, le coordinate di A devono verificare l'equazione della retta; dunque:

$$y_0 = mx_0 + n .$$

Sottraendro membro a membro le due ultime relazioni, si ha:

$$\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}.$$

Il parametro reale *m* può prendere infiniti valori. Ad ogni valore di *m* corrisponde una retta diversa del fascio di rette passanti per A.

Se $m = 0$, si ha la retta del fascio parallela all'asse delle *x* ($y = y_0$).

Esempio 1 Le equazioni del fascio di rette passanti per A(1,-3) sono date da:

$y + 3 = m(x - 1) \Rightarrow y = mx - m - 3$ (forma esplicita)
o anche:

$mx - y - m - 3 = 0$ (forma implicita).

La retta del fascio avente coefficiente angolare $m = 3$ è data da:
$y = 3x - 6$ oppure $3x - y - 6 = 0$.
La retta del fascio passante anche per B(-2,1) è tale che

1 = -2m - m - 3 $\Rightarrow$ m = -4/3;

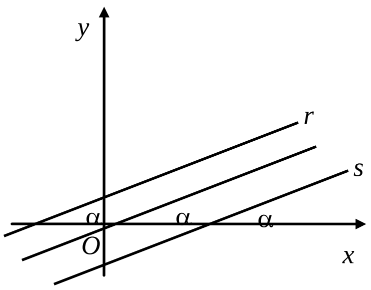
dunque la retta è:

$y = -\frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$ o anche: $4x + 3y + 5 = 0$.

Esempio 2 L'equazione ax - 2y + 3 = 0 rappresenta l'equatione di un fascio di rette passanti ttutte per uno stesso punto.

Infatti la stessa equazione può scriversi: $y - \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{a}{2}(x - 0)$, che esprime chiaramente l'equazione di tutte le rette del piano passanti per A(0,-3/2) ed aventi coefficiente angolare uguale ad a/2.

8 Rette parallele



Date due rette r e s, le cui equazioni sono:

$r: y = mx + n$

$s: y = m_1 x + n_1$

queste sono **parallele** se sono parallele ad una stessa retta passante per l'origine O degli assi cartesiani. Dunque, se quest'ultima ha coefficiente angolare m, anche le due rette r e s devono avere lo stesso coefficiente angolare m. Allora deve essere:

$$\boxed{m = m_1}.$$

Considerando le equazioni delle rette in forma implicita, le due equazioni:

$$\boxed{\begin{array}{l} ax + by + c = 0 \\ ax + by + c' = 0 \end{array}}$$

rappresentano le equazioni di due rette parallele.

In particolare, se si vuole scrivere l'equazione della retta s passante per $A(x_0, y_0)$ e parallela alla retta r di equazione $ax + by + c = 0$, si ha subito che l'equazione di s è:

$$\boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0}$$

Esempio 1 Data la retta r: y = 2x - 3 ed il punto A(-2,5), scrivere l'equazione della retta passante per A e parallela ad r.

L'equazione richiesta è: y + 2 = 2(x-5) $\Rightarrow$ y = 2x -9.

Esempio 2 Data la retta $r\!: 3x-2y+1=0$, scrivere l'equazione della retta s parallela a *r* e passante per A(3,7).

<u>Soluzione 1</u>: L'equazione di *s* è: 3*x* - 2*y* + c = 0. Imponendo il passaggio per A, deve essere: 3·3-2·7 + c = 0, da cui c = 5. Dunque l'equazione di s è: 3*x* - 2*y* + 5 = 0.

<u>Soluzione 2</u>: L'equazione di *s* è: $3(x-3)-2(y-7)=0 \Rightarrow 3x-2y+5=0$.

Esempio 3 Sono dati i punti A(2,4), B(1,1) e C(6,2). Determinare le coordinate del punto D, in modo che il quadrilatero ABCD si un parallelogramma.

Si scrive l'equazione della retta *r* passante per A e parallela alla retta (BC):

$$y-4=\frac{2-1}{6-1}(x-2) \quad \Rightarrow \quad y=\frac{1}{5}x+\frac{18}{5}$$

Si scrive l'equazione della retta *s* passante per C e parallela alla retta (AB):

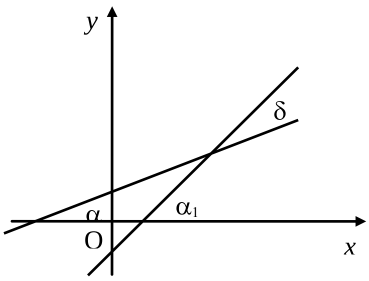
$$y-2=\frac{1-4}{1-2}(x-6) \quad \Rightarrow \quad y=3x-16$$

Il punto D é dato dall'intersezione delle rette r e s. Dunque:

$$D\!:\begin{cases} y=\frac{1}{5}x+\frac{18}{5} \\ y=3x-16 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=7 \\ y=5 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{D}(7{,}5),$$

come é immediato verificare con una rappresentazione geometrica dei punti.

9*Angolo tra due rette



Date due rette *r* e *s*, le cui equazioni sono:

$r\!: y=mx+n$

$s\!: y=m_1x+n_1$

queste formano, rispettivamente angoli α e α_1 con la direzione positiva dell'asse delle *x*, tali che:

$$\tan\alpha = m \text{ e } \tan\alpha_1 = m_1.$$

Un angolo esterno di un triangolo è uguale alla somma dei due angoli interni non adiacenti

L'angolo δ tra le due rette è tale che $\delta=\alpha_1-\alpha$ e, dunque, si ha:

$$\boxed{\tan\delta=\tan(\alpha_1-\alpha)=\frac{\tan\alpha_1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha_1\tan\alpha}=\frac{m_1-m}{1+m_1m}}.$$

In generale, ci sono due angoli, uno supplementare dell'altro, fra due rette, quindi un angolo acuto e l'altro ottuso (o entrambi retti). Se si vuole avere sempre l'angolo acuto, in caso di valore negativo per tanδ, è necessario prendere il valore assoluto dell'espressione precedente, oppure cambiare l'ordine con cui si considerano i due coefficienti angolari.

Esempio 1 Date le rette $y=3x-2$ e $y=2x+1$, calcolare l'angolo compreso tra le due rette.

L'angolo δ tra queste due rette è dato da:

$$\delta=\arctan\frac{3-2}{1+3\cdot 2}=\arctan\frac{1}{7}=8°7'\,48'$$

Esempio 2 Date le rette $y = -3x + 1$ e $y = x - 1$, calcolare l'angolo compreso tra le due rette.

L'angolo δ tra queste due rette è dato da:

$$\delta = \arctan\frac{-3-1}{1+(-3)\cdot 1} = \arctan 2 = 63°26'06''$$

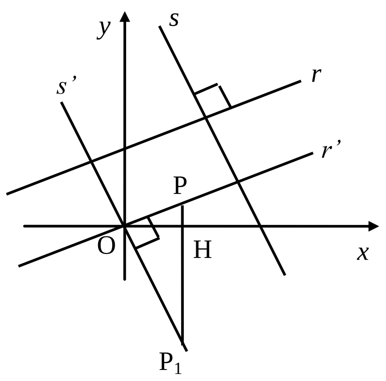
10 Rette perpendicolari

Date due rette *r* e *s*, le cui equazioni sono:

$$r: y = mx + n$$
$$s: y = m_1 x + n_1$$

queste sono **perpendicolari** se sono perpendicolari le corrispondenti rette parallele *r*' e *s*' passanti per O e aventi equazioni rispettive:

$$r': y = mx$$
$$s': y = m_1 x \cdot$$



Si considerino i punti $P(1,m)\in r'$, $P_1(1,m_1)\in s'$ e $H(1,0)$. Il triangolo OPP_1 é rettangolo e l'altezza relativa all'ipotenusa OH é media proprorzionale tra le proiezioni HP e HP_1 dei cateti sull'ipotenusa PP_1 (secondo teorema di Euclide). Dunque:

$$OH^2 = PH\cdot HP_1,$$

da cui, tenendo presente che, se m >0 allora $m_1 < 0$, o viceversa:

$$1^2 = m\cdot(-m_1),$$

da cui, infine:

$$\boxed{m\cdot m_1 = -1}$$

oppure (se m ≠0):

$$\boxed{m_1 = -\frac{1}{m}}.^{(*)}$$

Considerando le equazioni delle rette in forma implicita, le due equazioni:

$$\boxed{\begin{aligned} ax + by + c = 0 \\ bx - ay + c' = 0 \end{aligned}}$$

(*) Si ottengono gli stessi risultati con l'uso della trigonometria e dei paragrafi precedenti segnati con asterisco. Infatti, se le rette sono perpendicolari, la tangente del loro angolo δ è infinita, e quindi:

$$m\cdot m_1 + 1 = 0\ ,$$

da cui si deduce che il prodotto dei loro coefficienti angolari è uguale a -1.

rappresentano le equazioni di due rette perpendicolari.

In particolare, se si vuole scrivere l'equazione della retta s passante per $A(x_0, y_0)$ e perpendicolare alla retta *r* di equazione $ax + by + c = 0$, si ha subito che l'equazione di *s* è:

$$\boxed{b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0}$$

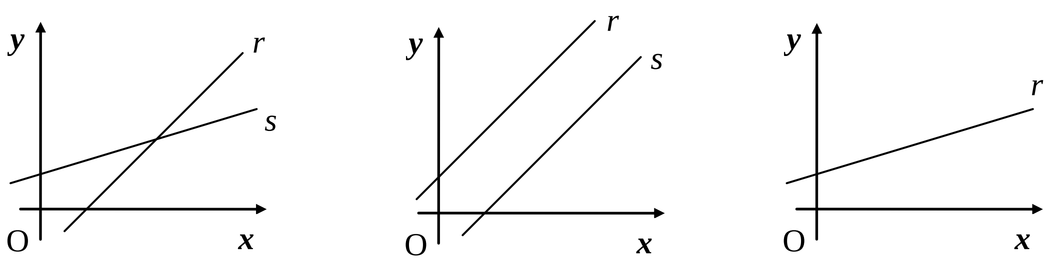
Una menzione particolare meritano, a questo punto, le rette parallele agli assi cartesiani: ogni retta del tipo *x* = *h* (parallela all'asse delle *y*, con coefficiente angolare infinito) è perpendicolare ad ogni retta del tipo *y* = *k* (parallela all'asse delle *x*, con coefficiente angolare nullo).

Esempio 1 Data la retta *r*: *y* = 2*x* - 3 ed il punto *A*(-2,5), scrivere l'equazione della retta passante per *A* e perpendicolare ad *r*.
L'equazione richiesta è: $y + 2 = -\frac{1}{2}(x - 5) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

Esempio 2 Data la retta *r* di equazione 2*x* + 3*y* - 2 = 0, scrivere l'equazione della retta s passante per A(1,-3) e perpendicolare ad *r*.
<u>Soluzione 1</u>: L'equazione di s è 3*x* - 2*y* + c = 0. Si determina c imponendo il passaggio di *s* per il punto A: 3·1-2·(-3) + c = 0, da cui si deduce c = -9. Dunque l'equazione di *s* è 3*x* - 2*y* - 9 = 0.
<u>Soluzione 2</u>: L'equazione di s è: 3(*x* - 1) - 2(*y* + 3) = 0, da cui segue subito 3*x* - 2*y* -9 = 0.

11 Posizioni relative di due rette e sistemi lineari

Dal punto di vista geometrico, due rette del piano sono incidenti, parallele o coincidenti. Nel piano cartesiano succede la stessa cosa:



rette secanti $r \cap s = \{P\}$ — rette parallele $r \cap s = \emptyset$ — rette coincidenti $r \cap s = r = s$

Analiticamente, se le due rette hanno equazioni cartesiane

$$r{:}\, ax + by + c = 0 \text{ e } s{:}\, a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

la ricerca del loro eventuale punto comune conduce alla risoluzione del sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a_1x+b_1y+c_1=0 \end{cases}$$

Allora:

- se il sistema é **determinato**, avendo una sola soluzione (x_0, y_0), le due rette date sono ***secanti*** nel punto P(x_0, y_0);
- se il sistema é **impossibile**, non avendo alcuna soluzione, le due rette date sono ***parallele***;
- se il sistema è **indeterminato**, avendo infinite soluzioni, le due rette date hanno infiniti punti in comune e sono ***coincidenti***.

Esempio 1 Determinare i punti d'intersezione rella retta r:y = 3x - 5 con gli assi cartesiani.
Sia A in punto d'intersezione di r con l'asse delle x e B quello con l'asse delle y. Si ha:

$$A: \begin{cases} y=3x-5 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow A: \begin{cases} 3x-5=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow A: \begin{cases} x=\dfrac{5}{3} \\ y=0 \end{cases}$$

$$B: \begin{cases} y=3x-5 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow B: \begin{cases} y=-5 \\ x=0 \end{cases}$$

Dunque A(5/3,0) e B(0,-5).

Esempio 2 Verificare se le due rette $r: y=3x-2$ e $s: x+2y-1=0$ hanno o no uno o infiniti punti in comune.
Le due rette non hanno lo stesso coefficiente angolare e, pertanto, non sono né parallele, né coincidenti; quindi hanno un solo punto in comune che si determina risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x+2y-1=0 \\ y=3x-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2(3x-2)-1=0 \\ y=3x-2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 7x-5=0 \\ y=3x-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5}{7} \\ y=\dfrac{1}{7} \end{cases}$$

Dunque il punto $A\left(\dfrac{5}{7}, \dfrac{1}{7}\right)$ è comune alle due rette.

Esempio 3 Verificare se le due rette $r: 3x-2y+5=0$ e $s: 3x-2y-1=0$ hanno o no uno o infiniti punti in comune.
Si vede subito che le due rette sono parallele e distinte e,pertanto, non hanno punti in comune. Il sistema delle loro due equazioni:

$$\begin{cases} 3x-2y+5=0 \\ 3x-2y-1=0 \end{cases}$$

é manifestamente impossibile.

Esempio 4 Data la retta *r* di equazione $y = 3x - 5$ ed il punto P(3,-2), calcolare la distanza tra P e la retta *r*.

Geometricamente, si manda da P la perpendicolare *s* alla retta *r*, si trova il punto d'intersezione H tra *r* e *s*, la distanza richiesta è la lunghezza del segmento PH.

Algebricamente $s\!: y-(-2) = -\frac{1}{3}(x-3)$ o anche: $y = -\frac{1}{3}x - 1$. Quindi:

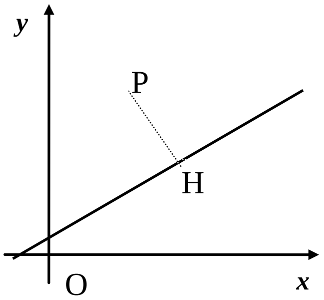
$$H\!:\begin{cases} y = 3x-5 \\ y = -\frac{1}{3}x - 1 \end{cases} \Rightarrow H\!:\begin{cases} 3x-5 = -\frac{1}{3}x - 1 \\ y = -\frac{1}{3}x - 1 \end{cases} \Rightarrow H\!:\begin{cases} 10x = 12 \\ y = -\frac{1}{3}x - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow H\!:\begin{cases} x = \frac{6}{5} \\ y = -\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{5} - 1 = -\frac{7}{5} \end{cases} \Rightarrow \mathrm{H}\left(\frac{6}{5}, -\frac{7}{5}\right).$$

Infine:

$$d(P,r) = PH = \sqrt{\left(\frac{6}{5}-3\right)^2 + \left(-\frac{7}{5}+2\right)^2} = \sqrt{\frac{81}{25}+\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{90}}{5} = \frac{3}{5}\sqrt{10}.$$

12 Distanza di un punto da una retta



In questo paragrafo si generalizza il procedimento dell'**Esempio 4** del paragrafo precedente, per trovare una formula che fornisca immediatamente la distanza di un punto da una retta.

Sia $P(x_0, y_0)$ il punto e *r*: $ax + by + c = 0$ la retta. Il coefficiente angolare di r è $m = -\frac{a}{b}$, dunque il coefficiente angolare della retta s passante per P e perpendicolare a r è: $m_1 = \frac{b}{a}$.

Allora le equazioni parametriche della retta s sono:

$$\text{s: } \begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \end{cases}.$$

Se λ_1 è il valore del parametro che corrisponde alle coordinate del punto H, sarà $H\left(x_0 + \lambda_1 a, y_0 + \lambda_1 b\right)$. Il valore di λ_1 si calcola imponendo che il punto H deve pure appartenere alla retta r:

$$a\left(x_0 + \lambda_1 a\right) + b\left(x_0 + \lambda_1 a\right) + c = 0 \Rightarrow \left(a^2 + b^2\right)\lambda_1 = -ax_0 - by_0 - c$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{-ax_0 - by_0 - c}{a^2 + b^2}$$

Dunque:

$$d(P,r) = PH = \sqrt{\left(x_0 + \lambda_1 a - x_0\right)^2 + \left(y_0 + \lambda_1 b - y_0\right)^2} = \sqrt{\lambda_1^2 a^2 + \lambda_1^2 b^2} =$$

$$= \left|\lambda_1\right| \sqrt{a^2 + b^2} = \left|\frac{-ax_0 - by_0 - c}{a^2 + b^2}\right| \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{\left|ax_0 + by_0 + c\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Concludendo, la distanza del punto P dalla retta r è data da:

$$\boxed{d(P,r) = \frac{\left|ax_0 + by_0 + c\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}.$$

Attenzione: l'equazione della retta deve essere scritta, per applicare la formula, sotto forma implicita.

Esempio 1 Data la retta r di equazione $y = 3x - 5$ ed il punto P(3,-2), calcolare la distanza tra P e la retta r.(Vedi **Esempio 3** del paragrafo precedente).
Scrivendo l'equazione di r sotto forma implicita $3x - y - 5 = 0$, si ha:

$$d(P,r) = \frac{\left|3 \cdot 3 - (-2) - 5\right|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{10}} = \frac{6}{10}\sqrt{10} = \frac{3}{5}\sqrt{10}.$$

Esempio 2 Calcolare la distanza del punto $P(1,-3)$ dalla retta r: $y = 2x + 1$.
Si scrive innanzitutto l'equazione della retta sotto forma implicita:
$2x - y + 1 = 0$; quindi si ha subito:

$$d(P,r) = \frac{\left|2 \cdot 1 - (-3) + 1\right|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6}{5}\sqrt{5}.$$

Esempio 3 Calcolare la distanza del punto P(3,2) dalla retta r: $x - 4y + 2 = 0$.
Si ha subito:

$$d(P,r) = \frac{\left|3 - 4 \cdot 2 + 2\right|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2}} = \frac{\left|-3\right|}{\sqrt{17}} = \frac{3}{17}\sqrt{17}.$$

Esempio 4 Calcolare la distanza fra le due rette parallele r: $y = 3x-1$ e s: $y = 3x + 4$.
Si prende un punto di una delle due rette parallele e si calcola la distanza di questo punto dall'altra retta. Allora dato che $P(0,4)$ è un punto della retta s, scrivendo la retta r sotto forma implicita ($3x - y - 1 = 0$), si ha subito:

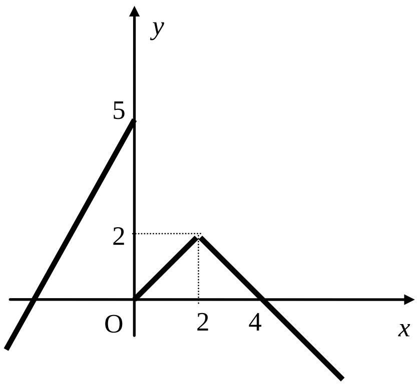
$$d(r,s) = d(P,r) = \frac{\left|3 \cdot 0 - 4 - 1\right|}{\sqrt{9+1}} = \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

13 Funzioni affini per intervalli

In questo paragrafo si vedranno alcune funzioni particolari, che pur essendo definite su tutto l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali,

- hanno una definizione diversa in sottoinsiemi (intervalli) diversi di $\mathbb{R}$;
- in ciascun sottoinsieme, risultano essere delle funzioni affini (per questo prendono il nome di ***funzioni affini per intervalli***);
- in ciascun intervallo, essendo delle funzioni affini,
  - se l'intervallo è infinito, si avrà una semiretta;
  - se l'intervallo é finito, si avrà un segmento.

Esempio 1 Disegnare la funzione: $y = \begin{cases} 2x+5 & \text{se } x \le 0 \\ x & \text{se } 0 < x \le 2 \\ 4-x & \text{se } x > 2 \end{cases}$.



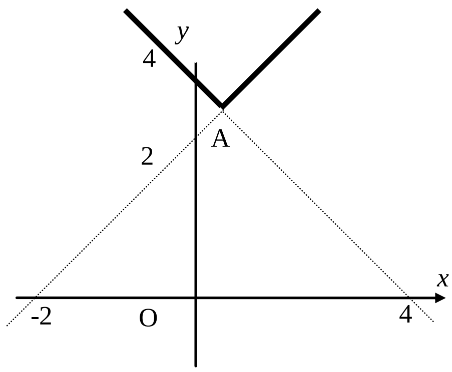
Nel primo intervallo ($x \le 0$), si ha la semiretta di equazio-ne $y = 2x + 5$; nel secondo intervallo ($0 < x \le 2$), si ha un segmento posto sulla bi-settrice $y = x$; nel terzo inter-vallo (x > 0) si ha la semiret-ta di equatione $y = 4 - x$.
Nel punto di ascissa $x = 0$ non c'é continuità tra la prima semiretta ed il segmento; nel punto di ascis-sa $x = 2$, invece, c'è continuità tra il segmento e la seconda semiretta.

Esempio 2 E' data la funzione: $y = |x-1| + 3$. Studiare la funzione e farne una rappresentazione grafica.

Intanto bisogna dire che la funzione risulta essere sempre positiva, in quanto é somma di due addendi, il primo ($|x-1|$) posivivo o nullo, ed il secondo (3) sempre positivo. inoltre, essendo:

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{se } x-1 \ge 0, \text{ quindi se } x \ge 1 \\ 1-x & \text{se } x-1 < 0, \text{ quindi se } x < 1 \end{cases}$$'

la funzione data é in realta l'unione di due semirette:
- la semiretta y = x - 1 + 3 = x + 2, se x ≥ 1
- la semiretta y = 1 - x + 3 = -x + 4, se x < 1



La figura a lato mostra la loro rappresentazione grafica (con tratto continuo). Il punto A(1,3) é il punto di raccordo delle due semirette. La funzione é una ***funzione affine per intervalli***.

Problema 3 E' data la funzione: $y = |2x-1| + |x|$. Studiare la funzione e farne una rappresentazione grafica.

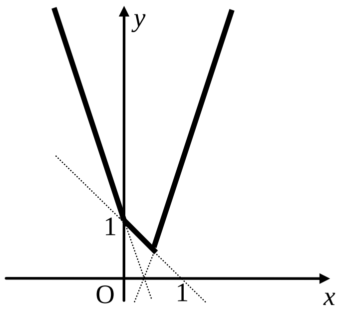
Intanto bisogna dire che la funzione risulta essere sempre positiva, in quanto é somma di due addendi, entrambi positivi o nulli e non si annullano per lo stesso valore della *x*. Inoltre, essendo:

$$|2x-1| = \begin{cases} 2x-1 & \text{se } 2x-1 \geq 0, \text{ quindi se } x \geq \dfrac{1}{2} \\ 1-2x & \text{se } 2x-1 < 0, \text{ quindi se } x < \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

la funzione si scompone in due semirette ed un segmento:

$$y = \begin{cases} 1-2x-x = 1-3x & \text{se } x < 0 & \text{(semiretta)} \\ 1-2x+x = 1-x & \text{se } 0 \leq x < \dfrac{1}{2} & \text{(segmento)} \\ 2x-1+x = 3x-1 & \text{se } x \geq \dfrac{1}{2} & \text{(semiretta)} \end{cases}$$



La figura a lato mostra la rappresentazione grafica della funzione data, che é un altro esempio di ***funzione affine per intervalli***.
Il punto di ascissa $x = 0$ é un punto di continuità tra la prima semiretta ed il segmento. Il punto di ascissa $x = 1/2$ é un punto di continuità tra il segmento e la seconda semiretta.

14 Disequazioni lineari in 2 incognite

Una disequazione lineare (cioé di primo grado) in due incognite x e y é una relazione del tipo:

$$ax + by + c \geq 0, \qquad (1)$$

dove il segno '≥' può essere sostituito da uno dei segni '≤', '<', '>'.

L'insieme delle coppie di numeri reali che soddisfano alla relazione (1) si chiama insieme delle soluzioni della (1).
Esempi di disequazioni lineari:

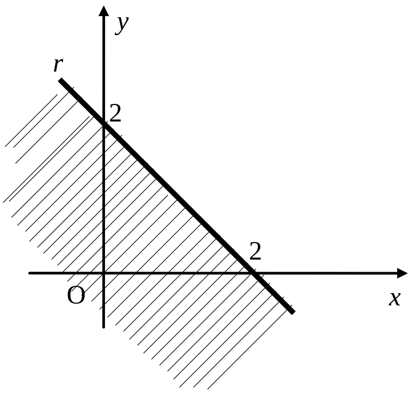
$$2x - y + 3 < 0$$
$$-3x + 4y + 7 > 0$$
$$x + y - 2 \leq 0$$
$$3x + y + 5 \geq 0.$$

In genere la ricerca dell'insieme soluzione si fa per via grafica:

- si disegna l'equazione $ax + by + c = 0$, corrispondente alla disequazione da risolvere;

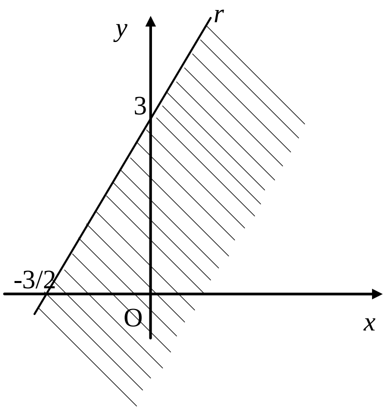
- questa equazione rappresenta una retta r del piano che divide il piano in due semipiani aventi come frontiera la retta r;
- uno di questi due semipiani ‘rappresenta’ l’insieme soluzione ricercato, nel senso che tutti i suoi punti di coordinate (x,y) fanno parte dell’insieme soluzione;
- la scelta del semipiano soluzione avviene in questo modo: si sceglie un punto $A(x_0,y_0)\notin r$, se le coordinate di A soddisfano la (1), il semipiano contenente A è il semipiano soluzione, altrimenti l’insieme soluzione é il semipiano opposto;
- la retta r è inclusa nel semipiano soluzione (che si dice per questo **semipiano chiuso**) se il segno che compare nella (1) è ‘$\leq$‘ oppure ‘$\geq$‘, in caso contrario la retta r é esclusa dal semipiano soluzione (che si dice per questo **semipiano aperto**).

Esempio 1 Risolvere la disequazione $x + y - 2 \leq 0$.



Dopo aver disegnato la retta r di equazione $x + y - 2 = 0$, si vede ad esempio se $O(0,0) \notin r$ soddisfa o meno la disequazione data. In questo caso, essendo $0 + 0 - 2 < 0$, il punto O appartiene al semipiano soluzione, che comprende anche i punti della retta r.

Esempio 2 Risolvere la disequazione $2x - y + 3 > 0$.



Dopo aver disegnato la retta r di equazione $2x - y + 3 = 0$, si vede ad esempio se $O(0,0) \notin r$ soddisfa o meno la disequazione data. In questo caso, essendo $2\cdot 0 - 0 + 3 > 0$, il punto O appartiene al semipiano soluzione, che *non* comprende i punti della retta r.

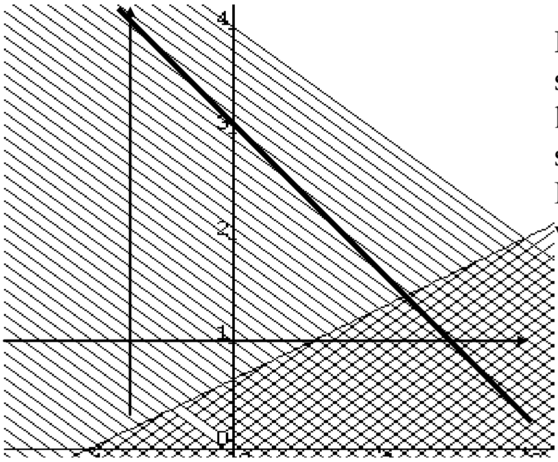
15 Sistemi di disequazioni lineari in 2 incognite

Un sistema di disequazioni lineari in due incognite é un sistema che comprende almeno due disequazioni lineari, come negli esempi che seguono:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 2 \geq 0 \\ x + y - 4 < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 3y + 1 \leq 0 \\ x < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 7x + 3y + 1 > 0 \\ y \leq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 3y + 1 > 0 \\ 2x + 3y \leq 0 \\ x - y + 1 < 0 \end{cases}$$

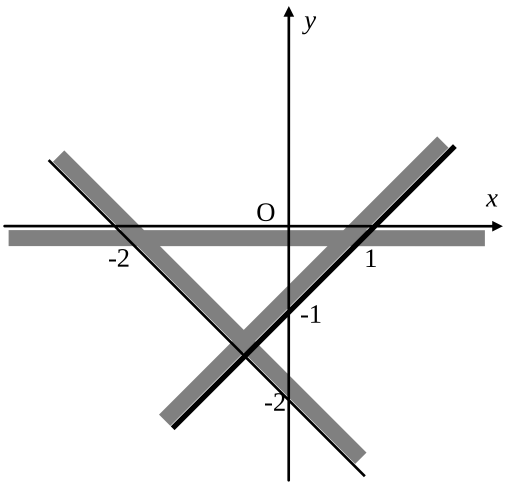
Risolvere un sistema di disequazioni lineari significa trovare innanzitutto l'insieme soluzione corrispondente a ciascuna disequazione del sistema. *L'insieme soluzione del sistema sarà l'intersezione delle soluzioni di ciascuna disequazione*.

Esempio 1 Risolvere il sistema di disequazioni lineari: $\begin{cases} 2x-3y+2\geq 0 \\ x+y-4<0 \end{cases}$.



Entrambe le disequazioni hanno come solutione il semipiano contenente l'origine degli assi cartesiani. Il primo semipiano é chiuso, il secondo aperto. L'insieme soluzione del sistema è visualizzato con il doppio tratteggio.

Esempio 2 Risolvere il sistema di disequazioni: $\begin{cases} x+y+2>0 \\ x-y-1\leq 0 \\ y<0 \end{cases}$.



In questo esempio, per maggiore chiarezza, i semipiani soluzione di ciascuna disequazione dono stati messi in evidenza con una spessa linea ombreggiata che fiancheggia la retta confine del semipiano stesso. Come si vede dalla figura l'insieme soluzione del sistema dato é fornito dalle coordinate dei punti internI al triangolo avente per vertici i punti (-2,0), (-1/2,-3/2) e (1,0). Solo il lato del triangolo avente per estremi (esclusi) gli ultimi due punti appartiene all'insieme soluzione.

16 Esercizi

1 Dopo aver disegnato nel piano cartesiano i punti A(2,0) e B(5,0), calcolare la distanza AB e le coordinate del punto medio di [AB].

2 Dopo aver disegnato nel piano cartesiano i punti A(0,5) e B(0,-3), calcolare la distanza AB e le coordinate del punto medio di [AB].

3 Dopo aver disegnato nel piano cartesiano i punti A(1,-5) e B(-4,3), calcolare la distanza AB e le coordinate del punto medio di [AB].

4 Rappresentare nel piano cartesiano (mettendo in evidenza le intersezioni con gli assi x e y) le rette:

a) $y = 4$ b) $y = -2$ c) $x = 3$
d) $x = -5$ e) $y = -2x+3$ f) $y = 4x - 1$
g) $2x - 3y + 4 = 0$ h) $5x + 3y - 2 = 0$

5 Scrivere l'equazione cartesiana (forma implicita e forma esplicita) e le equazioni parametriche della retta (AB) nei seguenti casi:

a) A(1,0), B(-3,5)
b) A(-3,1), B(5,-7)
c) A(3/5,-2/3), C(1/2,2/3)

6 Dato il punto P(-3,5) e la retta r:$y = 2x$-7.

a) Scrivere l'equazione della parallela condotta per P alla retta r
b) Scrivere l'equazione della perpendicolare s condotta per P alla retta r.
c) Determinare le coordinate del punto H d'intersezione di r con s.
d) Calcolare la distanza PH. Cosa rappresenta PH?

7 Sono date le rette r: $y = x - 1$, s: $2x + y + 3 = 0$ e il punto A(3,-2).

a) Scrivere l'equazione della retta r' condotta per A e parallela a r.
b) Scrivere l'equazione della retta s' condotta per A e perpendicolare a s.
c) Calcolare il perimetro e l'area del quadrilatero delimitato dalle rette r, s, r' e s'.

8 Sono dati i punti A(0,-1), B(2,5), C(5,-2).

a) Scrivere le equazioni cartesiane dei lati del triangolo ABC.
b) Scrivere le equazioni delle tre mediane del triangolo ABC.
c) Verificare che le tre mediane passano tutte per uno stesso punto (*baricentro*) di cui bisogna determinare le coordinate.
d) Calcolare il perimetro del triangolo ABC.

9 Sono dati i punti A(-3,0), B(4,3) e C(6,1).

a) Disegnare i punti A, B e C.
b) Condurre per A la parallela r alla retta (BC) e scriverne l'equazione cartesiana.
c) Condurre per C la parallela s alla retta (AB) e scriverne l'equazione cartesiana.
d) Determinare le coordinate del punto d'intersezione D tra le rette r e s.
e) Cosa rappresenta il quadrilatero ABCD? Calcolarne il perimetro e l'area.
f) Verificare che le diagonali [AD] e [BC] hanno lo stesso punto medio.

10 Sono dati i punti A(-3,0), B(4,3) e C(6,1).

a) Disegnare i punti A, B e C.
b) Scrivere le equazioni dei lati del triangolo ABC.
c) Scrivere le equazioni delle tre altezze del triangolo ABC.
d) Verificare che le tre altezze s'intersecano in uno stesso punto (*ortocentro*).
e) Calcolare l'area del triangolo ABC.

11 Sono dati i punti A(-3,4) e B(4,2).

a) Scrivere le equazioni cartesiana e parametriche di (AB).
b) Scrivere le equazioni cartesiana e parametriche dell'asse di [AB] (si ricorda che *l'asse di un segmento é la perpendicolare condotta per il punto medio del segmento*).
c) Verificare che, preso un punto qualunque dell'asse, questo ha uguale distanza dagli estremi di [AB].
d) Sull'asse di [AB] determinare le coordinate di uno dei due punti che hanno una distanza dalla retta (AB) uguale a $\frac{AB\sqrt{3}}{2}$. Sia C questo punto.
e) Scrivere le equazioni cartesiane delle rette (AC) e (BC).
f) Calcolare l'angolo ACB e giustigicare geometricamente il risultato.

12 Sono dati i punti A(3,0), B(7,2) e C(4,4).

a) Disegnare il triangolo ABC.
b) Per il punto medio M di [AC] condurre la retta *r* parallela ad (AB).
c) Determinare il punto d'intersezione N tra *r* e (BC).
d) Verificare che N è il punto medio di [BC].
e) Verificare che AB = 2MN.
f) Determinare le coordinate del punto D tale che il quadrilatero ACDB sia un parallelogramma.

13 Sono dati i punti A(-3,-2), B(0,3), C(4,0).

a) Disegnare i punti A, B, C.
b) Scrivere le equazioni dei lati del triangolo ABC.
c) Scrivere le equazioni dei tre assi dei lati del triangolo ABC.
d) Verificare che i tre assi s'intersecano in uno stesso punto (*circocentro*, centro della circonferenza circoscritta al triangolo ABC), equidistante dai vertici del triangolo ABC.
e) Calcolare gli angoli interni del triangolo ABC.

14 Sono dati i punti A(1,5), O(0,0) e B(5,1).

a) Disegnare i punti A, O, B.
b) Scrivere le equazioni dei lati del triangolo AOB.
c) La bisettrice dell'angolo AOB è la retta $y = x$. Verificare che un punto qualunque della bisettrice ha uguale distanza dai lati (OA) e (OB).
d) Scrivere le equazioni cartesiane delle bisettrici degli altri due angoli interni al triangolo AOB.
e) Verificare che le tre bisettrici s'intersecano in uno stesso punto I (*incentro*, centro della circonferenza inscritta nel triangolo AOB) e che il punto I ha uguale distanza (da calcolare) dai lati del triangolo.
f) Dimostrare che il raggio della circonferenza inscritta è anche uguale all'area del triangolo AOB divisa per il suo semiperimetro.

15 Sono dati i punti A(2,0), B(6,0) e la retta *r* di equazione 2*x* - 3*x* + 1 = 0. Determinare il punto della retta *r* che ha uguale distanza da A e da B.

16 Sono dati i punti A(2,0) e B(6,0). Determinare il luogo geometrico dei punti C del piano tali che il triangolo ABC abbia area uguale a 6.

17 E' dato il fascio di rette $r_m : mx - y + 2 - m = 0$.

a) Disegnare le rette corrispondenti a $m = 1$ (r_1) e a $m = -3$ (r_{-3}) e determinare graficamente ed algebrigamente le coordinate del loro punto d'intersezione P.
b) Verificare che il punto P appartiene a tutte le rette del fascio r_m (dunque il punto P è il fulcro del fascio di rette r_m).
c) Fra le rette r_m determinare quella passante per A(3,-1).
d) Fra le rette r_m determinare quella parallela alla retta $y = 2x + 1$.
e) Fra le rette r_m determinare quella perpendicolare alla retta $y = 2x + 1$.

18 Rappresentare le funzioni:

a) $y = \begin{cases} x-1 & \text{se } x < 1 \\ 2-x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} 2x+3 & \text{se } x < 0 \\ 3-x & \text{se } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2+x & \text{se } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$

c) $y = |x-3| + 3$

d) $y = |2x-1| + |x+2|$

19 Risolvere le disequazioni:

a) $x - 2y + 5 \geq 0$

b) $3x + 4y - 3 < 0$

f) $(x - y + 2)(x + y) \leq 0$

20 Risolvere i sistemi di disequazioni:

a) $\begin{cases} 2x + 5y - 1 \leq 0 \\ 4x - 3y + 2 > 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y > 0 \\ x - y < 0 \\ x \leq 0 \end{cases}$